Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht

Klaus Aspetsberger

Stiftsgymnasium Wilhering
Linzerstraße 8, 4073 Wilhering

Mit Computeralgebra-Systemen können Formeln algebraisch umgeformt, Gleichungen symbolisch und damit exakt gelöst, Ableitungen und Stammfunktionen bestimmt und Grenzwerte berechnet werden. Ein Einsatz von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht zieht somit umfangreiche Änderungen bezüglich Lehrinhalte und Methodik nach sich. In diesem Artikel wird das Computeralgebra-System **Derive** vorgestellt. Die Einsatzmöglichkeiten von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht werden anhand von Beispielen demonstriert. Abschließend wird über Erfahrungen berichtet, die bezüglich des Einsatzes von **Derive** an einer AHS erzielt wurden.

1. Was sind Computeralgebra-Systeme?

In den letzten zwanzig Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, Computersysteme zu entwickeln, mit denen auch Ausdrücke verarbeitet werden können, die Variablen enthalten. Seit etwas mehr als 10 Jahren ist das Computeralgebra-System **muMATH** für den Personal Computer erhältlich. Das Nachfolgersystem **Derive**, das seit drei Jahren auf dem Markt ist, ist durch seine leichte Bedienbarkeit auch für den Einsatz im Mathematikunterricht geeignet. Im folgenden werden einige Fähigkeiten und Eigenheiten von **Derive** angeführt, die in ähnlicher Form auch in allen anderen Computeralgebra-Systemen verfügbar sind.

Die Eingabe der Ausdrücke und die Auswahl der Befehle erfolgt in **Derive** über ein Menüsystem. Dadurch wird die Bedienbarkeit von **Derive** sehr vereinfacht. Am Bildschirm sind die untersten vier Zeilen für das Menü bzw. für Systemmeldungen reserviert. Das Menüsystem ist somit immer sichtbar. Der restliche Bildschirm oberhalb der Menüzeilen ist das Arbeitsfenster von **Derive**, das auch in mehrere kleinere Fenster von beliebiger Gestalt unterteilt werden kann. In diesen Fenstern werden die algebraischen Ausdrücke bzw. Graphen von Funktionen dargestellt.

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
                                   Free:100% Insert        Derive Algebra
```

Die Eingabe von Ausdrücken erfolgt über den Befehl **Author.** Dabei erscheint im Menüfeld eine Zeile, in der der Ausdruck in linearer Form eingetippt werden muß.

```
AUTHOR expression:  2 (8 + 7) 3^2

Enter expression
                                   Free:100% Insert        Derive Algebra
```

Die Eingabe wird mit Return bestätigt. Der eingegebene Ausdruck wird anschließend im Arbeitsfenster in zweidimensionaler Schreibweise dargestellt.

```
        2 (8 + 7)
1:    ------------
            2
           3
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
User                               Free:100%               Derive Algebra
```

Die Ausdrücke erscheinen zunächst unvereinfacht am Schirm (im Sinne einer Angabe) und werden fortlaufend numeriert. Das Berechnen/Vereinfachen der Ausdrücke erfolgt durch den Befehl **Simplify**. Dabei ist zu beachten, daß Computeralgebra-Systeme in einer rationalen Arithmetik arbeiten und somit immer exakt rechnen. Der Anwender braucht sich also um Rundungsfehler nicht zu kümmern. In **Derive** besteht jedoch auch die Möglichkeit, in einen Näherungsmodus zu schalten. Will man nur das Endergebnis in Dezimalschreibweise darstellen, so kann man dies durch den

Befehl **approX** erreichen. Bei jedem Befehl ist ein Buchstabe groß geschrieben. Für das Aufrufen eines entsprechenden Befehls braucht man nur den jeweiligen Großbuchstaben einzutippen.

```
        2 (8 + 7)
1:      ─────────
            2
           3

        10
2:      ──
        3

3:      3.33333
────────────────────────────────────────────────────────────────────────
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Approx(2)                              Free:100%            Derive Algebra
```

Für das Umformen von Ausdrücken mit Variablen stehen die drei Befehle **Simplify, Expand** und **Factor** zur Verfügung. **Simplify** liefert dabei einen vereinfachten Ausdruck, der dem ursprünglichen Ausdruck noch weitgehend ähnlich ist. Es werden dabei unter anderem gleiche Summanden und gleiche Faktoren zusammengefaßt, numerische Teilausdrücke berechnet, ganzzahlige Potenzen von Produkten gebildet, usw. Der Befehl **Expand** multipliziert auftretende Produkte aus bzw. bestimmt bei rationalen Ausdrücken die Partialbruchzerlegung. Der Befehl **Factor** faktorisiert den gewählten Ausdruck. Die Befehle können auch auf Teilausdrücke angewandt werden.

Gibt man z.B. folgenden Ausdruck #4 ein

$$4:\quad \frac{\left[2\,a - \frac{1}{2}\,b\right]\left[\frac{3}{2}\,a + b\right]}{a - b}$$

und vereinfacht ihn mit **Simplify**, so erhält man

$$5:\quad \frac{(3\,a + 2\,b)\,(4\,a - b)}{4\,(a - b)}$$

Markiert man mit den Zähler des Ausdruck #5 und wendet darauf den Befehl **Expand** an, so erhält man

$$6: \quad \frac{12\,a^2 + 5\,a\,b - 2\,b^2}{4\,(a - b)}$$

Wendet man hingegen auf den gesamten rationalen Ausdruck #5 den Befehl **Expand** an, so erhält man dessen Partialbruchzerlegung

$$7: \quad \frac{15\,b^2}{4\,(a - b)} + 3\,a + \frac{17\,b}{4}$$

Faktorisiert man schließlich den Ausdruck #7 mit **Factor**, so erhält man den Ausdruck #8, der identisch mit Ausdruck #5 ist.

$$8: \quad \frac{(3\,a + 2\,b)\,(4\,a - b)}{4\,(a - b)}$$

Mit **Derive** kann man auch Gleichungen und Gleichungssysteme lösen. Dazu gibt man zunächst die Gleichung in herkömmlicher Schreibweise mit **Author** ein

$$1: \quad 2\,a^2\,x + 3\,y = 7$$

und wendet anschließend den Befehl **soLve** auf den Ausdruck #1 an. Enthält eine Gleichung mehrere Variablen, muß noch die Lösungsvariable, nach der die Gleichung aufzulösen ist, eingegeben werden. Löst man obige Gleichung nach x auf, so erhält man

$$2: \quad x = - \frac{3\,y - 7}{2\,a^2}$$

Will man jedoch die Gleichung nach a auflösen, so erhält man die beiden Lösungen

$$3: \quad a = - \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\left[\dfrac{7 - 3\,y}{x}\right]}}{2}$$

und

$$4: \quad a = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\left[\frac{7 - 3y}{x}\right]}}{2}$$

Es ist mit **Derive** auch möglich, in Ausdrücken die Variablen mit Werten zu belegen oder Teilausdrücke durch andere Ausdrücke zu ersetzen. Bereits bestehende Ausdrücke kann man mit **Build** zu neuen Ausdrücken zusammenbauen. Dadurch muß man große Ausdrücke nicht jedesmal neu eingeben.

Derive verfügt auch über eine Reihe von Funktionen aus der Analysis. Will man z.B. von dem Ausdruck

$$1: \quad \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}$$

die erste Ableitung berechnen, so wendet man darauf den Befehl **Calculus Differentiate** an. Man erhält zunächst den unvereinfachten, formalen Ausdruck

$$2: \quad \frac{d}{dx}\,\frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}$$

Mit **Simplify** kann man nun die erste Ableitung berechnen und man erhält

$$3: \quad \frac{\mathrm{COS}(x)}{x} - \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x^2}$$

Von diesem Ausdruck kann man nun zur Probe die Stammfunktion bestimmen. Der entsprechende Befehl in **Derive** lautet Calculus Integrate. Wieder erhält man zunächst den unvereinfachten Ausdruck

$$4: \quad \int \left[\frac{\mathrm{COS}(x)}{x} - \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x^2}\right] dx$$

Mit **Simplify** erhält man als Stammfunktion wieder

$$5: \quad \frac{\mathrm{SIN}\ (x)}{x}$$

Weiters kann man mit **Derive** Grenzwerte berechnen, Summen und Produkte in geschlossener Form darstellen und von einer Funktion die Taylorreihenentwicklung aufstellen lassen. In den mitgelieferten Hilfsdateien finden sich noch weitere Funktionen zum Lösen von Spezialaufgaben aus der Analysis und für das Lösen von Differentialgleichungen.

In **Derive** hat man auch die Möglichkeit, Funktionsgraphen zu zeichnen. Dazu kann man den Bildschirm in zwei oder mehrere Fenster teilen und eines bzw. einige der Fenster als Graphikfenster deklarieren. Man kann auf diese Weise, die in einem Algebrafenster erstellten Ausdrücke im Graphikfenster veranschaulichen. Funktionen mit einer Variable werden in einem zweidimensionalen 2D-Graphikfenster dargestellt. Sie dürfen dazu in kartesischer Darstellung, Polarkoordinatendarstellung oder in Parameterform angegeben werden. Funktionen mit zwei Variablen werden in einem dreidimensionalen 3D-Graphikfenster dargestellt. Ab Version 2 können auch dreidimensionale Oberflächen bzw. Raumkurven mittel isometrischer Projektion in einem 2D-Graphikfenster dargestellt werden.

Ab Version 2 verfügt **Derive** auch über einfache Konstrukte zum Programmieren. So gibt es eine Funktion ITERATE, mit deren Hilfe Iterationen (z.B. Fixpunktiteration, Newton Verfahren) beschrieben werden können. Eine Funktion IF ermöglicht das formulieren von Verzweigungen, die auch in einander geschachtelt vorkommen dürfen. Weiters sind auch rekursive Funktionsdefinitionen erlaubt.

2. Einsatzmöglichkeiten von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht

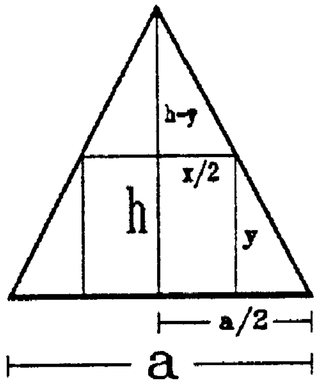
Ähnlich wie für herkömmliche Computersysteme bieten sich auch für Computeralgebra-Systeme folgende Einsatzmöglichkeiten im Mathematikunterricht:

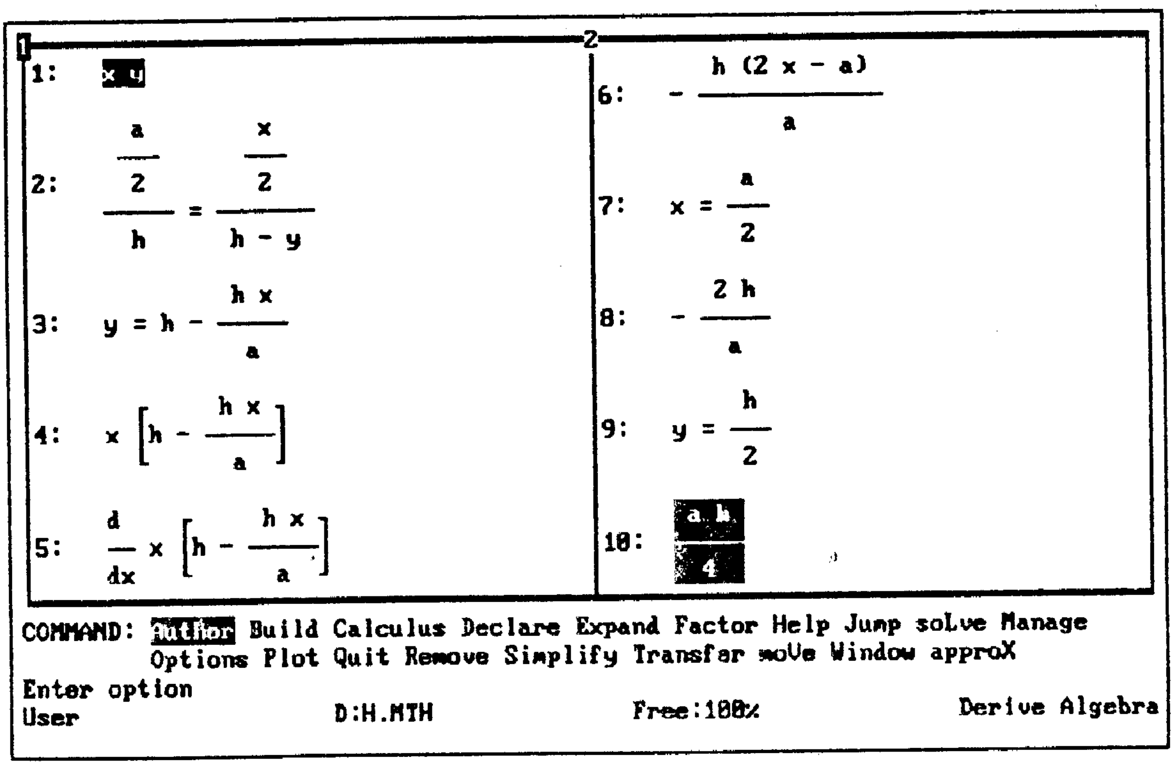
2.1 Symbolischer Taschenrechner

Computeralgebra-Systeme wie z.B. Derive lassen sich sehr einfach bedienen und können so wie der herkömmliche Taschenrechner im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Allerdings sind Computeralgebra-Systeme leistungsstärker und können auch jene Teile einer Aufgabe bearbeiten, in denen Formeln umgeformt und vereinfacht werden müssen bzw. ein Kalkül angewandt wird. Es können jedoch nicht alle Schritte eines Problems von einem Computeralgebra-System gelöst werden. So bleibt nach wie vor der Vorgang des Modellierens bzw. des Beschreibens dem Schüler überlassen.

Beispiel: Extremwertaufgaben

Einem gleichschenkligen Dreieck, das durch die Längen der Basis a und der Höhe h angegeben wird, soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt so eingeschrieben werden, daß eine Rechtecksseite auf der Basis des Dreiecks liegt.



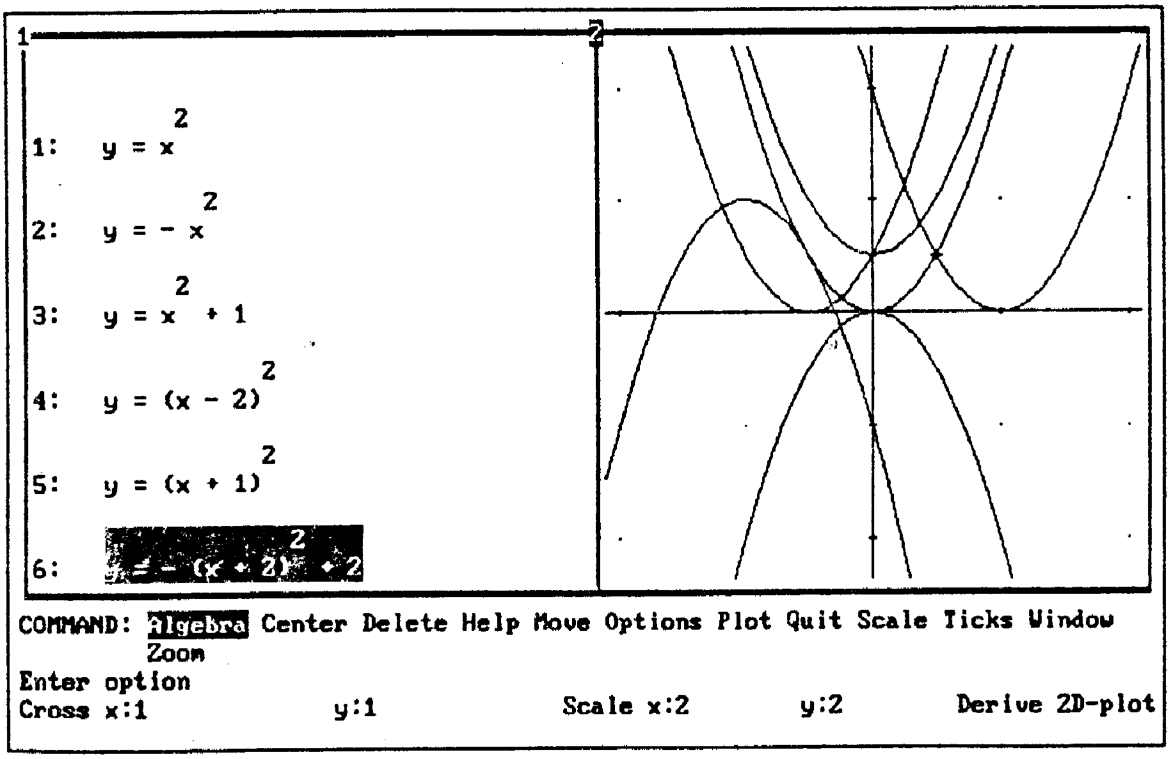


Die Zielfunktion (der Flächeninhalt des Rechtecks) in Zeile 1 und die Nebenbedingung in Zeile 2 müssen von dem Schüler über **Author** eingegeben werden. Dieser Modellierungsvorgang, in dem das ursprünglich verbal gestellte Problem in eine Formelsprache übersetzt wird, muß von dem Schüler händisch, das heißt ohne Unterstützung des Computers, durchgeführt werden. Aus der Nebenbedingung kann mit Hilfe von **soLve** die Variable y explizit ausgedrückt werden (Zeile 3) und mit **Manage Substitute** in Zeile 1 eingesetzt werden (Zeile 4). Von dieser neuen Zielfunktion, die nur mehr von x abhängt, bestimmt man mit **Calculus Differentiate** die erste Ableitung (Zeile 5 bzw. Zeile 6). Mit **soLve** berechnet man die Nullstelle des erhaltenen Ausdrucks (Zeile 7). Mit **Calculus Differentiate** kann man auch die zweite Ableitung der Zielfunktion bestimmen (Zeile 8). Diese hängt nur von den Konstanten a und h ab und ist stets negativ. Somit liefert die gefundene Lösung für x tatsächlich ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt. Setzt man mit **Manage Substitute** die erhaltene Lösung für x in Zeile 3 ein, so erhält man den dazugehörigen Wert für y. Setzt man schließlich beide Werte in Zeile 1 ein, so erhält man den maximalen Flächeninhalt. Man beachte, daß ab Zeile 3 alle Rechnungen vom Computer ausgeführt werden können. Die Aufgabe des Schülers besteht darin, die richtigen Befehle auszuwählen.

2.2 Veranschaulichen von Sachverhalten und Objekten

Im speziellen ergeben sich in der Verbindung mit graphischen Möglichkeiten, wie sie **Derive** oder auch Mathematica bieten, viele Möglichkeiten, mathematische Objekte, Sachverhalte oder auch Vorgangsweisen zu veranschaulichen. Im folgenden seien einige Beispiele dafür angeführt:

- Wie sieht der zu einem Funktionsterm gehörige Funktionsgraph aus? **Derive** bietet dazu die angenehme Möglichkeit den Bildschirm in zwei (oder mehrere) Fenster zu unterteilen. So kann man in einem Fenster der algebraischen Ausdrücke (Funktionsterme) generieren und parallel dazu - ständig sichtbar - die dazugehörigen Funktionsgraphen zeichnen lassen.



Der Ausdruck in Zeile 1 des Algebrafensters stellt die Grundform einer quadratischen Funktion dar. Der Ausdruck in Zeile 2 klappt den Graph der quadratischen Funktion nach unten. Der Ausdruck in Zeile 3 verschiebt die quadratische Funktion nach oben. Besonders interessant sind die Ausdrücke in den Zeilen 4 und 5. Durch sie wird der Graph der quadratischen Funktion nach rechts bzw. nach links verschoben. Im Ausdruck aus Zeile 6 treten all diese Varianten kombiniert auf.

- Hat man obige Übung für einen Funktionstyp ausführlich bearbeitet, kann man auch die umgekehrte Frage stellen: Wie sieht der zu einem Funktionsgraph gehörige Funktionsterm aus? Dabei soll zu einem vorgegebenen Funktionsgraphen ein passender Funktionsterm gesucht werden.

- Die Lösung eines linearen Gleichungssystems in zwei Variablen kann als Schnitt zweier Geraden veranschaulicht werden. Parallel dazu kann man das Gleichungssystem aber auch noch exakt durch algebraische Umformungen lösen.

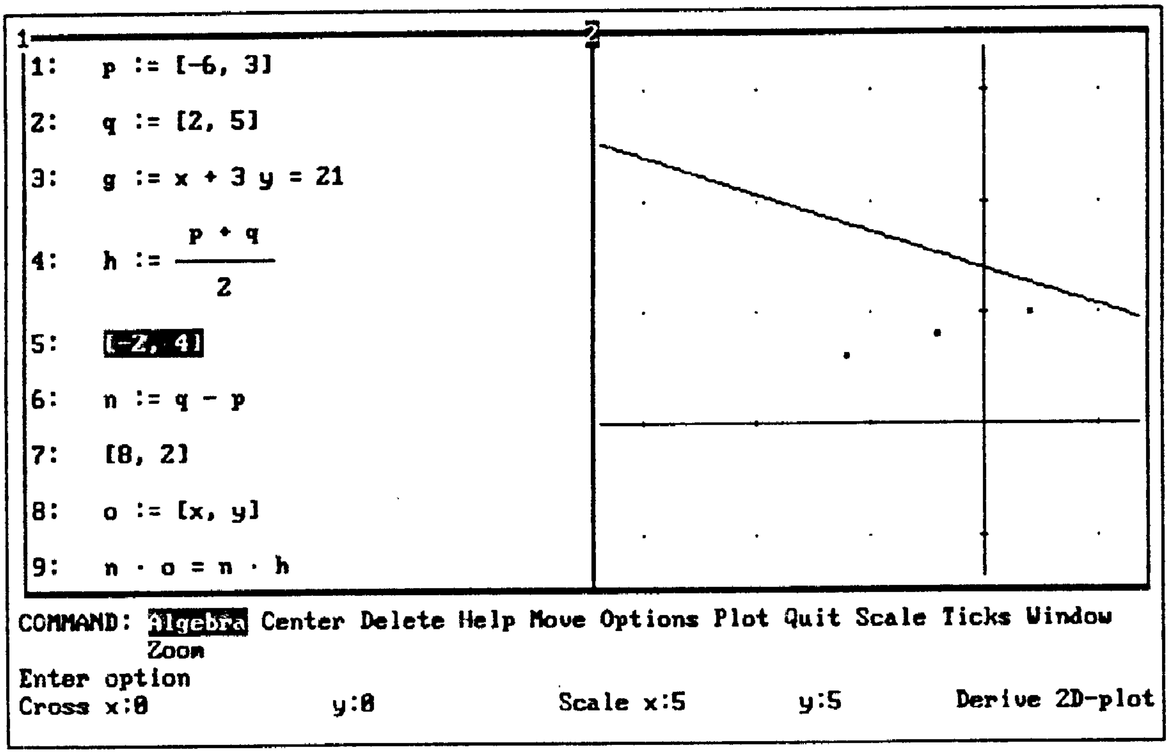
- Lösungen quadratischer Gleichungen können als Nullstellen einer quadratischen Funktion angesehen werden. Gemäß dem konstanten Glied erhält man keine, eine oder zwei Nullstellen. Auch hier können die Lösungen durch exakte Rechnung überprüft werden.

- Besonders anschaulich wird analytische Geometrie, wenn man die in einem Algebrafenster berechneten Punkte, Geraden, Kreise etc. parallel dazu in einem Graphikfenster darstellt.

Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht

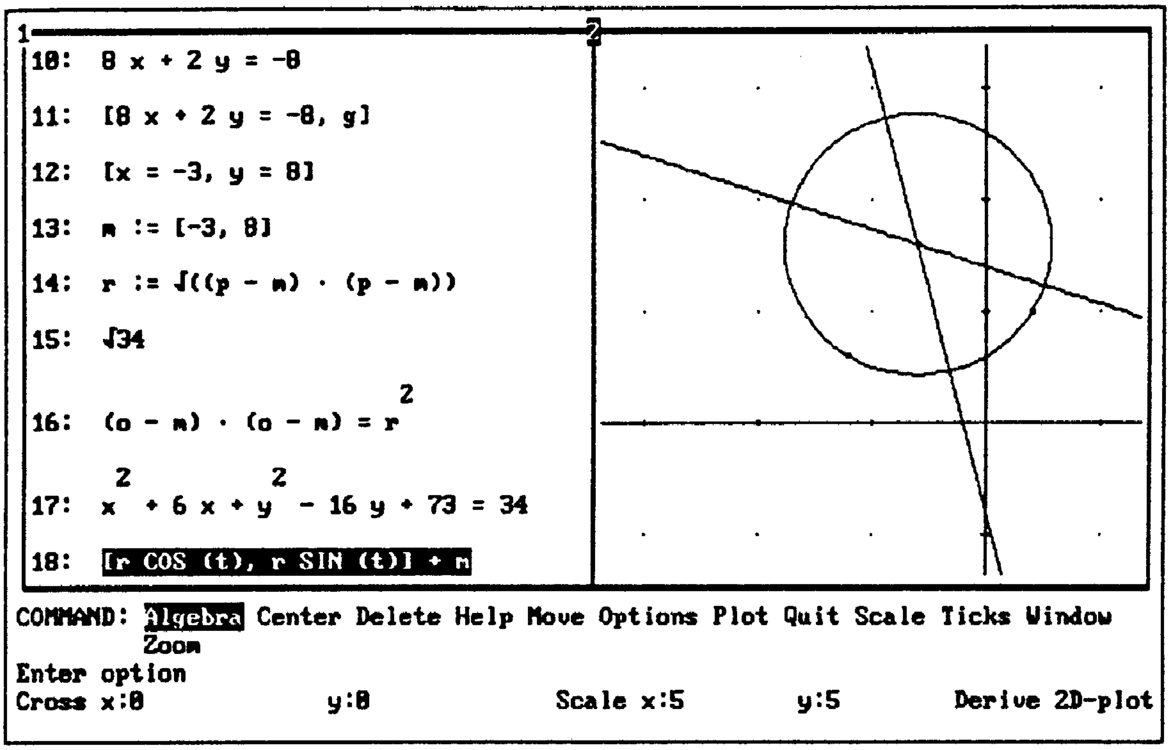
Beispiel:

Ein Kreis durch P(-6 / 3) und Q(2 / 5) hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden g: x+3y = 21. Ermittle die Kreisgleichung!



Zunächst belegt man die Variablen p und q mit den angegebenen Punkten. Es können Variablen aber auch symbolische Ausdrücke als Werte zugewiesen werden. So wird die Variable g mit der Geradengleichung belegt. Beide Punkte und die Gerade g können im Graphikfenster dargestellt werden. Um den Mittelpunkt des Kreises zu berechnen, stellt man zunächst die Streckensymmetrale der Strecke PQ auf. Dazu bestimmt man den Halbierungspunkt H. Man gibt den Ausdruck in Zeile 4 mit **Author** ein und vereinfacht ihn mit **Simplify** zu Zeile 5. Genauso verfährt man mit dem Verbindungsvektor von P nach Q (Zeile 6 bzw. Zeile 7), der gleichzeitig auch Normalvektor der Streckensymmetrale ist. Anschließend stellt man die Normalform der Streckensymmetrale (Zeile 9) auf. Vereinfacht man Zeile 9 mit **Simplify** so wird die allgemeine Form der Normalform auf die konkreten Werte angewandt und man erhält die Streckensymmetrale von PQ (Zeile 10). In Zeile 11 schneidet man diese Streckensymmetrale mit der Geraden g, indem man das lineare Gleichungssystem bestehend aus der Streckensymmetrale und g mit **Author** eingibt. Mit **soLve** erhält man den Mittelpunkt M als Lösung (Zeilen 12 und 13).

Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht



Den Radius berechnet man über das skalare Produkt. Zeile 16 stellt die allgemeine Form eines Kreises dar, die mit Simplify zur konkreten Kreisgleichung (Zeile 17) vereinfacht wird. In Zeile 18 wird der gesuchte Kreis noch in Parameterform angegeben. Diese Darstellung eignet sich besser für das Zeichnen. Man beachte, daß die Zeilen 4, 6, 8, 9 usw. Formeln darstellen, die von den konkreten Werten unabhängig sind. All diese Formeln bilden ein Programm, das zur Lösung dieser Aufgabenklasse herangezogen werden kann.

2.3 Trainer

Die bestehenden Computeralgebra-Systeme wurden zwar nicht für Trainingszwecke entwickelt, sie können aber auch hier zum Einsatz kommen. So treten in vielen Übungsbeispielen langweilige Rechenschritte wie Einsetzen oder einfache Umformungen auf, die dem Computer überlassen werden können. Die schwierigen Schritte hingegen sollen vom Schüler gelöst werden (siehe White-Box/Black-Box Prinzip im folgenden Kapitel). Besonders hervorzuheben sei die Begeisterung, mit der Schüler Aufgaben am Computer lösen. Der Computereinsatz bietet hier die Möglichkeit, Wissen spielerisch zu erwerben und den Unterricht abwechslungsreich zu gestalten.

Will man ein spezielles Tutorsystem entwickeln, mit dessen Hilfe algebraische Umformungen geübt werden können, so muß dieses als Kern ein Computeralgebra-System besitzen, mit dessen Hilfe man die Korrektheit der Umformungen überprüfen kann.

3. Das White-Box/Black-Box Prinzip

Die meisten Lehrinhalte der Mittelschulmathematik sind im Repertoire von Computeralgebra-Systemen enthalten und können von diesen in einem Schritt bewältigt werden. Es stellt sich somit die Frage, was Schüler noch sinnvollerweise lernen sollen. Darüber gehen die Meinungen weit auseinander und des bilden sich in Diskussionen zwei gegensätzliche Standpunkte heraus:

a) Es ist nicht mehr erforderlich, daß Schüler einzelne Kalküle ausführen können. Man muß lediglich wissen, in welchen Situationen und zu welchem Zweck die einzelnen mathematischen Operationen und Methoden angewandt werden müssen. Die Exekution der Operationen kann einem Computer überlassen werden.

b) Schüler lernen bei der Durchführung eines Kalküls die verschieden Lösungstechniken der Mathematik kennen und erlangen so mathematische Einsichten. Aus diesem Grund sollten Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht überhaupt nicht eingesetzt werden.

Ein schrittweises Einsetzen des Computers erscheint als sinnvoller Mittelweg. Es kommt dabei darauf an, was in den jeweiligen Beispielen von dem Schüler erlernt werden soll. Jene Teile einer Aufgabe, die für den Schüler neu sind und somit erlernt werden sollen, müssen vom Schüler selbst gelöst werden. Der Computer kann zur Lösung von Bekanntem, Vertrautem herangezogen werden und so lästige, langwierige Rechenvorgänge abkürzen.

Diese Vorgangsweise kann als White-Box/Black-Box Prinzip (siehe [4]) zusammengefaßt werden. Die White-Box enthält die neuen, schwierigen Schritte einer Aufgabe, deren Bewältigung dem Schüler überlassen wird. In der Black-Box stehen die bereits bekannten Verfahren zur Verfügung. Diese können vom Computer ausgeführt werden.

Der Inhalt von White-Box und Black-Box kann sich sogar beim selben Problemtyp gemäß dem Bildungsstand der Schüler ständig ändern. Betrachtet man z.B. das Gleichungslösen, so wird in einem frühen Stadium die Auswahl einer geeigneten Äquivalenzumformung in der White-Box und das Bruchrechnen in der Black-Box stehen. Bei Wurzelgleichungen hingegen ist die Frage, wann man eine Gleichung quadrieren darf Inhalt der White-Box. Das Lösen quadratischer Gleichungen hingegen ist bereits bekanntes Wissen und steht in der Black-Box. Schließlich konzentriert man sich bei Textaufgaben auf das Aufstellen einer Gleichung und überläßt deren Lösung dem Computer.

4. Auswirkungen auf den Mathematikunterricht

Die Einführung von Computeralgebra-Systemen wird den Mathematikunterricht in viel größerem Ausmaß verändern, als dies bei der Einführung des Taschenrechners geschehen ist. Kann man den herkömmlichen Taschenrechner nür für numerische Berechnungen heranziehen, so umfaßt der Einsatzbereich eines Computeralgebra-Systems beinahe den gesamten Mathematiklehrstoff der Mittelschule und verfügt noch über weiterführende Techniken.

4.1 Erfahrungen

Seit 1984 werden am Stiftsgymnasium Wilhering in Zusammenarbeit mit dem Forschungsinstitut für Symbolisches Rechnen RISC-Linz ständig Versuche durchgeführt, in denen die Einsatzmöglichkeiten von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht und deren Auswirkungen untersucht werden (siehe [1], [2] und [3]).

- Als erfreulichste Erfahrung sei die **Begeisterung**, mit der die Schüler mit dem Computeralgebra-System **Derive** und dessen Vorgänger **muMATH** arbeiteten, erwähnt. Daran hat sicherlich die einfache Bedienbarkeit (im besonderen von **Derive**), die ein rasches Einsteigen ermöglicht, einen wesentlichen Anteil. Es machte den Schülern sichtlich Freude, mit Formeln zu experimentieren, Graphen von Funktionen zeichnen und möglichst schwere Aufgaben vom Computer lösen zu lassen.

- Gegenüber dem Taschenrechner tritt jedoch beim Einsatz eines Computers plötzlich eine **Schwierigkeit** in den Vordergrund. Es ist dies die Eingabe über eine Tastatur, die wesentlich komplexer ist als die eines Taschenrechners und mehr Fingerfertigkeit erfordert.

- Der Einsatz eines Computeralgebra-Systems stellt neue **Anforderungen** an die Schüler. Bei der Lösung eines Beispiels müssen nun die Schüler auf *drei* verschiedenen Ebenen des Problemlösens Bescheid wissen. Will man im obigen Beispiel aus der analytischen Geometrie den Mittelpunkt des Kreises berechnen, so muß man zunächst im Bereich der Geometrie wissen, daß der Mittelpunkt des Kreises der Schnittpunkt der Geraden g mit der Streckensymmetrale von PQ ist. Weiters muß man im Bereich der mathematischen Methoden wissen, daß der Schnittpunkt zweier Geraden durch Lösen eines Gleichungssystems berechnet werden kann. Schließlich muß man auf der Ebene des Computeralgebra-Systems wissen, wie (bzw. mit welchem Befehl) Gleichungssysteme gelöst werden können.

4.2 Möglichkeiten

Durch den Einsatz von Computeralgebra-Systemen ergeben sich neue Möglichkeiten für den Mathematikunterricht:

- Eine große Klasse von nunmehr auch symbolischen Aufgaben kann durch den Computer gelöst werden. Somit müssen die langweiligen und oft auch zeitraubenden Routineaufgaben nicht mehr vom Schüler gelöst werden, der sich **auf das Wesentliche** und die meist schweren, Kreativität erfordernden Schritte beim Problemlösen **konzentrieren** kann.

- Die meisten Beispiele können von einem Computeralgebra-System nicht in einem Schritt gelöst werden. Die Aufgaben müssen dann von den Schülern in Teilaufgaben zerlegt werden. Da aber Computeralgebra-Systeme relativ komplexe Probleme lösen können, ist die Zerlegungstiefe in der Regel nicht sehr tief und die Grobstruktur der einzelnen Beispiele wird besonders transparent. Schüler werden somit zu einem **strukturierten Vorgehen** beim Lösen von Aufgaben angehalten.

- Oftmals können die Beispiele eines bestimmten Aufgabentyps nach demselben Schema gelöst werden (vgl. Extremwertaufgabe, Beispiel aus der analytischen Geometrie). Dieses Schema stellt in einer allgemeinen Formulierung einen Algorithmus zur Lösung der Aufgaben dieses bestimmten Typs dar. Durch diese Beispiele kann der **algorithmische Aspekt** der Mathematik herausgearbeitet und ein natürlicher Einstieg in das Programmieren geschaffen werden. Das Computeralgebra-System Derive verfügt ab Version 2 über einfache algorithmische Konstrukte, die die Formulierung von Programmen ermöglichen.

- Nach einer kurzen Einführung in den jeweiligen Problembereich, die sinnvollerweise für alle Schüler gemeinsam durchgeführt wird, hat der einzelne Schüler die Möglichkeit, Aufgaben gemäß seinem Wissenstand unabhängig vom Fortgang der anderen zu lösen. Durch diese **individuelle Anpassungen** an das Leistungsvermögen des einzelnen werden sowohl gute als auch weniger begabte Schüler merklich mehr gefördert aber auch gefordert als durch einen gemeinsamen, herkömmlichen Unterricht. Diese Möglichkeit bietet sich bei jeglichem Einsatz eines Computers im Mathematikunterricht. Der Vorteil von Computeralgebra-Systemen liegt jedoch darin, daß sie einerseits sehr einfach zu bedienen sind und dadurch die Einführungsphase sehr kurz gehalten werden kann, andererseits kann ein viel größerer Aufgabenbereich mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems geübt und bearbeitet werden als durch ein herkömmliches Computersystem.

4.3 Änderungen

Die Verfügbarkeit von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht wird notwendigerweise auch einige Änderungen an den Lehrinhalten, den Lehrmethoden und vor allem am Lehrmaterial und den Lehrbüchern nach sich ziehen.

- Am augenscheinlichsten sind die erforderlichen Änderungen bei den Schulbüchern. Bis zu 80 % der **Beispiele** in den derzeit eingesetzten Mathematikschulbüchern können von einem Computeralgebra-System in einem Schritt gelöst werden. Die Lösung dieser Beispiele beschränkt sich auf das Eintippen der Angabe. Ein Großteil der bestehenden Beispiele, die nur dazu dienen, die Anwendung eines Kalküls zu üben, muß durch neue Beispiele ersetzt werden, die vor allem den Vorgang des Beschreibens und Modellierens zum Inhalt haben.

- Ebenfalls wird es auch erforderlich sein, neue **Methoden** für die Lehre der Mathematik, wie z.B. das in Kapitel 3 beschriebene White-Box/Black-Box Prinzip, zu entwickeln und im Unterricht zu testen.

- Durch die Verfügbarkeit immer leistungsfähiger Computersysteme ist es nicht mehr so von Bedeutung, einzelne mathematische Lösungsverfahren zu erlernen bzw. sie intensiv zu trainieren. Es scheint viel wichtiger zu sein, die **Methode der Mathematik** zu lehren, d.h. zu lehren, wie man in der Mathematik allgemein Probleme löst. Die Methode der Mathematik besteht aus einem Dreischritt (siehe [5]). Beim ersten Schritt des Problemlösens wird das in einer Realität gestellte Problem in ein formales, in einem für die Realität geeigneten Modell formuliertes Problem übersetzt. Im zweiten Schritt bestimmt man die Lösung des formalen Problems im Modell. Diese Modellösung muß im dritten Schritt auf die Realität angewandt werden. Gerade der erste Schritt, das Übersetzen, und der dritte Schritt, das Anwenden der Lösung auf die Realität, werden auch bei noch so leistungsstarken Computersystemen immer vom Menschen durchgeführt werden müssen und es erscheint sinnvoll, gerade diese Schritte in neuen Beispielen besonders zu üben.

Zitierte Literatur

[1] K. Aspetsberger, G. Funk: *Experiments with muMATH in Austrian Highschools*, SIGSAM Bulletin, vol. 18, no. 4, 1985, pp. 4-7.

[2] K. Aspetsberger, B. Kutzler: *Symbolic Computation - A New Chance in Education*, Computers in Education (F. Lovis, E.D. Tagg, eds), Elsevier Science Publishers B.N. (North-Holland), IFIP, 1988, pp. 331-336.

[3] K. Aspetsberger, B. Kutzler: *Using a Computer Algebra System at an Austrian High School*, Proc. The Sixth International Conference on Technology and Education, Orlando, Florida, U.S.A., March 21-23, 1989, CEP Consultants Ltd., vol. 2, pp. 476-479.

[4] B. Buchberger: *Should Students Learn Integration Rules?*, RISC-LINZ Tech. Rep. 89-7.0, Johannes Kepler Universität Linz, 1989.

[5] B. Buchberger, F. Lichtenberger: *Mathematik für Informatiker I*, 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.